3542. *a)* $A(4;0)$, $B(0;6)$, $\overrightarrow{AB}(-4;\ 6) \Rightarrow \mathbf{n}(3;2)$, $3x+2y=12$; *b)* $4x-3y=-12$; *c)* $6x-5y=30$; *d)* $6x+y=4$; *e)* $3x+5y=4$; *f)* $x+y=a$; *g)* $x-y=a$.

3543. $A(a;0)$, $B(0;b)$, $\overrightarrow{AB}(-a;\ b)$, $\mathbf{n}\,(b;a)$, $bx+ay=ab$, osszuk el $a\cdot b\neq 0$-val $\Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3544. $\alpha=30°, 60°, -45°, 0°$; $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+7$; $y=\sqrt{3}\,x+7$; $y=-x+7$; $y=7$.

3545. *a)* $\mathbf{n}(3;4)$, $P(0;2)$, $\mathbf{v}(-4;3)$, $\mathrm{tg}\,\alpha=-\dfrac{3}{4}$, $\alpha=-36{,}87°$; *b)* $\mathbf{n}(4;-1)$, $P(3;0)$, $\mathbf{v}(1;4)$, $\mathrm{tg}\,\alpha=4$, $\alpha=75{,}96°$; *c)* $\mathbf{n}(4;-3)$, $P(15;0)$, $\mathbf{v}(3;4)$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\alpha=53{,}13°$; *d)* $\mathbf{n}\left(\sqrt{3}\,;-1\right)$, $P(0;-4)$, $\alpha=60°$; *e)* $3x+4y=125$, $\mathbf{n}(3;4)$, $P(15;20)$, $\alpha=-36{,}87°$; *f)* $\mathbf{n}(1;0)$, $P(4;0)$, $\alpha=90°$; *g)* $\mathbf{n}(0;1)$, $P(0;-3)$, $\alpha=0°$;

3546. *a)* $7-6=1$, P rajta van; *b)* $2\cdot 1-1\neq 3$, P nincs az egyenesen; *c)* rajta van; *d)* egyik sincs rajta; *e)* a $(-2;0)$, $(7;6)$, $(10;8)$ pontok rajta vannak.

3547. P koordinátáit az egyenes egyenletébe helyettesítve $-5-6=a \Rightarrow a=-11$.

3548. *a)* $\left.\begin{array}{l} P_1\in e \Rightarrow 2a+3b=1 \\ P_2\in e \Rightarrow \underline{7a+4b=1} \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\dfrac{1}{13},\ b=\dfrac{5}{13}$; *b)* $a=\dfrac{2}{7},\ b=-\dfrac{1}{14}$; *c)* $a=0,\ b=\dfrac{1}{2}$.

3549. A feltétel szerint $y=x \Rightarrow x+3=0$, $x=-3$, $P\,(-3;-3)$.

3550. $y=\dfrac{15}{11}$, $P\left(\dfrac{30}{11};\ \dfrac{15}{11}\right)$.

3551. $P\,(2;1)$, $P_2(-5;-1)$, $P_3(-12;-3)$.

3552. $P_1(x;6)$, $P_2(x;-6)$, $4x+18=6 \Rightarrow x=-3$; $4x-18=6 \Rightarrow x=6$, $P_1(-3;6)$, $P_2(6;-6)$.

3553. $bx+ay=ab$; $4b+2a=ab \Rightarrow b=\dfrac{2a}{a-4}$, $a\neq 4$.

3554. Az átlók egyenlete: $x=0$, $y=0$. $A(5;0)$, $B\,(0;4)$, $C\,(-5;0)$, $D\,(0;-4)$, $4x\pm 5y=20$; $4x\pm 5y=-20$. $A(4;0)$, $B\,(0;5)$, $C\,(-4;0)$, $D\,(0;-5) \Rightarrow 5x\pm 4y=20$, illetve $5x\pm 4y=-20$.

3555. Húzzuk meg az egyeneseket az adott pontokon át. *a)* $A(4;0)$, $B\,(0;3)$; *b)* $(1;0)$, $(0;3)$; *c)* $\left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$, $(0;2)$; *d)* $(2;0)$, $(0;3)$; *e)* $(5;0)$, $(0;8)$; *f)* $(3;0)$, $(0;3)$; *g)* $(20;0)$, $(0;-8)$.

3556. *a)* $t=24$ területegység; *b)* $t=\dfrac{50}{99}$; *c)* 3 területegység.

3557. $\mathbf{n}\,(5;3)$, $F\,(4;9)$; a felező merőleges egyenlete: $5x+3y=47$; $P\left(\dfrac{47}{5};\ 0\right)$, $Q\left(0;\ \dfrac{47}{3}\right)$.

3558. Az ABC háromszög középvonalainak egyenesei felelnek meg. $A_1(9;-2)$, $B_1(1;3)$, $C_1(4;-3)$; $5x+8y=29$; $B_1C_1(3;-6)$, $2x+y=5$; $x-5y=19$.

3559. Ha $x=0$, $y=2$, ezért a legtávolabbi pont ordinátája 1 lehet. $4x<1001$ miatt $x=250$, $P\,(250;1)$.

3560. $y=\sqrt{3}\,x$. Ha $x\in\mathbf{R}$, akkor y irracionális.

3561. Az $A(a; 0)$, $B\ (0; b)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4b+3a=ab;\ a=\frac{4b}{b-3}=4+\frac{12}{b-3}$; b lehetséges értékei: 2; 5; 7.
$b_1=2, a_1=-8;\quad b_2=5, a_2=10;\quad b_3=7, a_3=7;\quad x-4y=-8;\quad x+2y=10;\quad x+y=7.$

3562. A-ból induló szögfelező: $7x+y=37$. C-ből induló szögfelező:
$\left(3\sqrt{5}+2\right)x+\left(4\sqrt{5}+11\right)y=23\sqrt{5}+82.$
B-ből: $\left(4\sqrt{5}-2\right)x+\left(3\sqrt{5}+11\right)y=14\sqrt{5}-82.$

3563. Tükrözzük az A pontot az y tengelyre $A_1(-2; 3)$. $PA+PB=PA_1+PB$, ami akkor lesz minimális, ha P az A_1B egyenesen van. $\overrightarrow{A_1B}(8; -7)$, $\mathbf{n}(7; 8)$, $7x+8y=10$, $x=0 \Rightarrow P\left(0; \frac{5}{4}\right)$.

3564. Tükrözzük az A-t az x tengelyre. Az $A_1(1; 3)$ pontot kapjuk. $A_1C+CB=AC+CB$, minimális, ha C az A_1B-n van. $\overrightarrow{A_1B}(11; 11)$, $\mathbf{n}(1; -1)$, $x-y=4$, $y=0$, $C(4; 0)$.

3565. B csúcsot az x tengelyre tükrözve B'-t kapjuk. B' az AC oldalegyenesre illeszkedik. $B'(5; 3)$, $\overrightarrow{AB}(2; 1)$, $\mathbf{n}(1; -2)$, $x-2y=-1$, $y=0$, $C(-1; 0)$.

3566. Az adott egyenes egy pontját $P(4; -1)$-t eltolva $Q(8; -3)$ $\mathbf{n}(3; -4) \Rightarrow 3x-4y=36$.

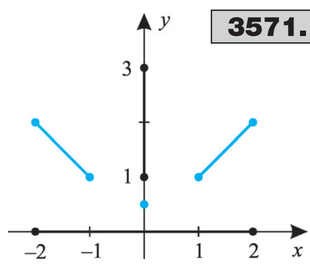
3567. $(x+4)^2+y^2-\left[(x-2)^2+(y-6)^2\right]=20 \Rightarrow 3x+4y=11.$

3568. Tükrözzük az y tengelyt a P pontra $\Rightarrow x=6$. $Q(6; 0)$. $\overrightarrow{PQ}(3; -7)$, $\mathbf{n}(7; 3) \Rightarrow 7x-3y=42$.

3569. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{6}{a}-\frac{1}{b}=1 \Rightarrow 6b-a=6,\ b=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ a=3\left(\sqrt{5}-1\right).$

3570. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1$ és $\frac{ab}{2}=8$. $3b+a=ab \Rightarrow 3b+a=16 \Rightarrow b(16-3b)=16 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3b^2-16b+16=0$. $b_1=4$, $a_1=4$; $b_2=\frac{4}{3}$, $a_2=12$. Innen: $x+y=4$, illetve $x+9y=12$.

3571. $y=x$, ha $x\in[1; 2]$, $y=-x$, ha $x\in[-2; -1]$, illetve $P\left(0; \frac{1}{2}\right)$.



3571.

3572. *a)* $y=\frac{3}{4}x-1$. A keresett egyenes egy pontja $P(0; -1)$, $m=-\frac{3}{4}$, $y=-\frac{3}{4}x-1$.
b) Tükrözzük pl. a $P(4; 2)$ pontot C-re. $\frac{x+4}{2}=1 \Rightarrow x=-2$, $y=10 \Rightarrow P'(-2; 10)$. Mivel $e' \parallel e$, $3x-4y=-46$.

3573. $e: y-4=m(x-7)$; ha $x=-1 \Rightarrow y=4-8m$, $F(-1; 4-8m)$. Az e egyenes x tengelyre eső pontja $Q\left(7-\frac{4}{m}; 0\right)$. F a PQ felezőpontja $\frac{7-\frac{4}{m}+7}{2}=-1 \Rightarrow m=\frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow e: x-4y+9=0.$

V

3574. $\overrightarrow{AB}\left(-3;\,3\sqrt{3}\right)$, $\mathbf{n}\left(\sqrt{3};\,1\right)$, AB: $\sqrt{3}x+y=6\sqrt{3}$. $DE\parallel AB$ $\sqrt{3}x+y=-6\sqrt{3}$, BC: $y=3\sqrt{3}$, EF: $y=-3\sqrt{3}$; $\overrightarrow{DC}\left(3;\,3\sqrt{3}\right)$, $\mathbf{n}\left(\sqrt{3};\,-1\right)$, $\sqrt{3}x-y=-6\sqrt{3}$, $FA\parallel DC$: $\sqrt{3}\,x-y=6\sqrt{3}$.

3575. *a)* $A_1\left(\frac{9}{2};\,\frac{3}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{11}{2};\,\frac{3}{2}\right)$, $C_1(2;\,4)$. A súlyvonalak egyenlete: $\overrightarrow{AA_1}\left(\frac{3}{2};\,-\frac{17}{2}\right)$, $\mathbf{n}(17;\,3)$. s_a: $17x+3y=72$, s_b: $x-9y+8=0$, s_c: $4x+3y=20$. A középvonalak: $\overrightarrow{AB}(-2;\,-6)$, $\mathbf{n}(3;\,-1)$, $3x-y=\frac{27}{2}+\frac{3}{2}=15$; $5x+7y=38$; $11x+5y=42$; *b)* $A_1(1;\,-4)$, $B_1\left(4;\,-\frac{3}{2}\right)$, $C_1\left(-1;\,-\frac{1}{2}\right)$. A súlyvonalak: $7x-y=11$, $x-16y=28$, $13x+14y=-6$;
A középvonalak: $5x-6y=29$, $9x+4y=-7$, $4x+10y=1$.

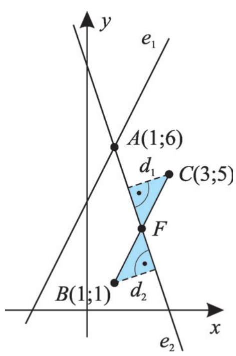
3576. *a)* $P(1;\,-9)$, $Q(7;\,6)$, $R(3;\,-4)$. $\overrightarrow{PR}(2;\,5)$, $\overrightarrow{RQ}(4;\,10)$, $\overrightarrow{RQ}=2\cdot\overrightarrow{PR}$, ezért egy egyenesen vannak. *b)* R a PQ egyenesen van.

3577. $\mathbf{v}_1(b-a;\,a-b)$, $\mathbf{v}_2(2a-b;\,-b-a)$. $\frac{2a-b}{b-a}=-\frac{a+b}{a-b}\Rightarrow a=2b$.

3578. $e_1\parallel BC$ $\overrightarrow{BC}(2;\,4)\Rightarrow\mathbf{n}\,(2-1)$, e: $2x-y=-4$,
BC: $2x-y-1=0$,
$d_A=\frac{|2\cdot1-6-1|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\,(\approx 2{,}2\text{ m})$. Az ábrán látható derékszögű háromszögek egybevágósága miatt e_2 is megfelel. $F(2;\,3)$, $\overrightarrow{AF}(1;\,-3)$, $\mathbf{n}(3;\,1)\Rightarrow e_2$: $3x+y=9$,
$d_1=d_2=\frac{|3+1-9|}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}(\approx 1{,}6\text{ m})$.

3579. $A\left(-6\sqrt{3};\,-2\right)$, $B\left(6\sqrt{3};\,-2\right)$. A száregyenesek: $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$.

3578.



3580. $k\approx 27{,}43$ egység. $m_b=6$ egység, így $\operatorname{tg}\alpha=\frac{6}{4}$, $\alpha=56{,}3$; $\operatorname{tg}\gamma=\frac{6}{7}$, $\gamma=40{,}6$; $\beta=83{,}1$.

3581. Tükrözzük B-t az x tengelyre: $B_1(-2;\,-3)$. $\overrightarrow{B_1A}(7;\,7)$, $\mathbf{n}(1;\,-1)$, a beeső fénysugár $x-y=1$. $P(1;\,0)$, $\overrightarrow{PB}(3;\,-3)$, $\mathbf{n}(1;\,1)$, a visszavert fénysugár $x+y=1$.

3582. $\gamma=-2$ arányú O középpontú hasonlóság a $B_1(2;\,-4)$ pontot A-ba viszi. $P(0;\,0)$.

3583. Szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. $y=\frac{3}{2}x$ vagy $y=x+1$, vagy $y=2x+\frac{1}{2}$ egyenesek pontjai elégítik ki a feltételt.

3584. Egyenespárt akkor kaphatunk, ha a bal oldal két lineáris kifejezés szorzata. Ha $\lambda = 4$, akkor $(2x+y)^2 - 2(2x+y) - 3 = 0$, ahonnan $(2x+y-3)(2x+y-1) = 0$, tehát $2x+y = 3$ vagy $2x+y = 1$.

3585. *a)* $\mathbf{n}_1(1; -2)$, $\mathbf{n}_2(3; -2)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} = 3 + 4 = 7$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{13}$, $7 =$

$$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cos(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \Rightarrow \cos\omega = |\cos \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2| = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} \right| = \frac{7}{\sqrt{5 \cdot 13}} \Rightarrow \omega = 29{,}74°$$

b) 49,4°; *c)* 45°; *d)* 56,3°; *e)* 90°; *f)* 78,7°. *g)* $\mathbf{n}_1(A_1B_2)$, $\mathbf{n}_2(A_2B_2)$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$;

$$|\mathbf{n}_2| = \sqrt{A_2^2 + B_2^2},\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2,\ \cos\omega = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|.$$

V

3586. AC felezőpontja $F_1(5; 1)$, BD felezőpontja $F_2(5; 1)$, ezért a négyszög paralelogramma. $\overrightarrow{AC}(18; 8) \Rightarrow \mathbf{n}_1(4; -9)$, $\overrightarrow{BD}(12; -8) \Rightarrow \mathbf{n}_2(2; 3)$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{97}$, $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{13}$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -19$.

$$\cos\omega = \left| \frac{-19}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{97}} \right| \Rightarrow \omega = 57{,}6°.$$

3587. Ha az egyenesek irányszöge α és β, a két egyenes hajlásszöge $\varphi = \alpha - \beta$, $m_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $m_2 = \operatorname{tg} \beta$. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \operatorname{tg}\omega = \left| \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$.

3588. *a)* $\alpha = 18{,}43°$, $\beta = 53{,}13°$, $\gamma = 108{,}44°$. *b)* $\alpha = 67{,}6°$, $\beta = 105{,}3°$, $\gamma = 7{,}1°$.

3589. $\omega = 78{,}5°$.

3590. $\omega = 64{,}4°$.

3591. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = -1$, $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$. $\varphi = \beta - \omega$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-1-3}{1-3} = 2$, $y = 2x + 4$.

3592. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{9}$, $m_1 = \operatorname{tg}(\alpha + 45°) = \dfrac{\frac{5}{9} + 1}{1 - \frac{5}{9}} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow 7x - 2y = -25$,

$$m_2 = \operatorname{tg}(\alpha - 45°) = \frac{\frac{5}{9} - 1}{1 + \frac{5}{9}} = -\frac{7}{2} \Rightarrow 2x + 7y = 8.$$

3593. $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\operatorname{tg}(\alpha + 60°) = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$,

$\operatorname{tg}(\alpha - 60°) = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. $y = (2 + \sqrt{3})x - 5\sqrt{3} - 6$, illetve $y = (2 - \sqrt{3})x + 5\sqrt{3} - 6$.

3594. *a)* $\omega = 72{,}4°$. *b)* 65,2°.

3595. $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = -\frac{3}{5}$, $m_3 = \frac{4}{5}$, $m_4 = -\frac{5}{3}$. $\operatorname{tg}(e_1; e_4) = \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{5}{3}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}} = -\frac{29}{3}$,

$\operatorname{tg}(e_2; e_3) = \dfrac{\frac{4}{3} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{12}{15}} = \frac{29}{3}$. $\operatorname{tg}(\alpha + \gamma) = 0 \Rightarrow \alpha + \gamma = 180°$.

3596. Ha a csúcsok egész koordinátájú pontok, akkor az oldal négyzete: a^2 pozitív egész $\Rightarrow t = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ irracionális. Másrészt a háromszög befoglalható olyan téglalapba, amelynek oldalai a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak, csúcsai egész számok, így területe is egész. A téglalapnak a szabályos háromszögön kívüli részeinek területe racionális számok, így a szabályos háromszög területe is racionális lenne, ami ellentmondás. Így nem lehet minden csúcs egész koordinátájú.

3597. $x = 4 + 2t$; $y = 7 - 3t$.

3598. A $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ koordináta-rendszerben az egyenes egyenletét egyértelműen meghatározza egy adott $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontja és egy $\mathbf{v}(a; b; c)$ irányvektora. Egy $P(x, y, z)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a P_0 ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenesre, ha $P_0P = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor, ahol $\mathbf{r}$ a P pont és $\mathbf{r}_0$ a P_0 pont helyvektora, párhuzamos a $\mathbf{v}$ vektorral. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda\mathbf{v}$ legyen, ahol $\lambda \in \mathbf{R}$. Innen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{v}$. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = x_0 + \lambda a$; $y = y_0 + \lambda b$; $z = z_0 + \lambda c$. *a)* $x = 1 + 5\lambda$; $y = -1 + \lambda$; $z = 2 - 3\lambda$; *b)* $x = \lambda$; $y = 2\lambda$; $z = -\lambda$; *c)* $x = 2$; $y = 3 + \lambda$; $z = 4 + 2\lambda$; *d)* $x = 7$; $y = -2$; $z = 5 + \lambda$.

3599. *a)* $\mathbf{v}(1; -3; 2)$, $A(1; 2; -3)$. $x = 1 + \lambda$; $y = 2 - 3\lambda$; $z = -3 + 2\lambda$; *b)* $\mathbf{v}(-2; -4; 4)$, $A(0; 1; 3)$. $x = -2\lambda$; $y = 1 - 4\lambda$; $z = 3 + 4\lambda$.

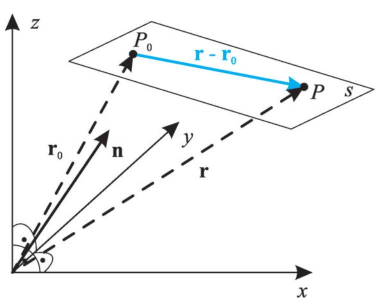
3600. *a)* A $P_0(2; -5; 7)$ pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = 2 + 2\lambda$; $y = -5 + 3\lambda$; $z = 7 + 6\lambda$. $\mathbf{v}(2; 3; 6)$. *b)* $P_0(0; -4; 5)$, $\mathbf{v}(2; 7; 4)$; *c)* $P_0(0; 0; 0)$, $\mathbf{v}(3; 5; 2)$.

3601. $\dfrac{1+3}{4} = \dfrac{y-6}{5}$ és $\dfrac{1+3}{4} = \dfrac{z+1}{2}$. $P_0(1; 11; 1)$.

3602. A hajlásszög az irányvektorok hajlásszögével egyenlő. $\mathbf{v}_1(2; 3; 1)$, $\mathbf{v}_2(3; 4; 5)$.

$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cos\varphi$; $\cos\varphi = \dfrac{6 + 12 + 5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}}$, $\varphi = 29{,}62°$.

3603.



3603. Legyen az s sík egy adott pontja $P_0(x_0, y_0, z_0)$, a P_0 helyvektora $\mathbf{r}_0$. Legyen a sík egyik normálvektora $\mathbf{n}(A; B; C)$ ($\mathbf{n}$ nem nullvektor!) P_0 és $\mathbf{n}$ a síkot egyértelműen meghatározzák. Az $\mathbf{r}$ helyvektorú $P(x, y, z)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a síkra, ha $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra. Ekkor $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. A felírt skaláris szorzatot kifejezhetjük az $\mathbf{n}$ vektor és az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ koordinátáival: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Innen $Ax + By + Cz + D = 0$, ahol $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. *a)* $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 5$, $x_0 = -7$. $x - y + 2z + 18 = 0$. *b)* $x + y + z - 9 = 0$.

3604. $P_0(2; 5; 5)$, $\mathbf{n}(0; 0; 1)$, $z - 5 = 0$.

3605. Először meg kell határozni, például az $A(1; 0; 2)$, $B(4; 3; -1)$, $D(5; -2; 4)$ nem egy egyenesre illeszkedő pontok által kifeszített síkot. Képezzük az $\overrightarrow{AB}(3; 3; -3)$ és az $\overrightarrow{AD}(4; -2; 2)$ vektorok vektoriális szorzatát. (Válasszuk egyszerűség kedvéért az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyirányú $(1; 1; -1)$ koordinátájú vektort és az $\overrightarrow{AD}$ vektorral egyirányú $(2; -1; 1)$ koordinátájú vektort.) Ekkor $\frac{\overrightarrow{AB}}{3} \times \frac{\overrightarrow{AD}}{2} = 0 \cdot \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Tehát az ABD síkra merőleges egyik normálvektor koordinátáit: $(0; -3; -3)$, illetve $(0; -1; -1)$. Az ABD sík egyenlete az $A(1; 0; 2)$ pont és az $\mathbf{n}(0; -1; -1)$ normálvektor segítségével felírható: $y + z = 2$. Ezt az egyenletet a C csúcs koordinátái is kielégítik, mert $0 \cdot 0 + 3 - 1 = 2$ igaz egyenlőség.

V

3606. *a)* $\mathbf{n}(2; 5; -4)$, $P(-2; 3; 0)$; *b)* $\mathbf{n}(2; -11; 0)$, $P(20; 3; z)$; $z \in \mathbf{R}$; *c)* $\mathbf{n}(6; 0; 0)$, vagy például $\mathbf{n}^*(1; 0; 0)$, $P\left(\frac{13}{6}; y; z\right)$ $y, z \in \mathbf{R}$.

3607. *a)* A sík normálvektora lehet az $\overrightarrow{AB}$ vektor $\overrightarrow{AB}(-2; -4; 0)$, a sík egyik pontja az AB szakasz felezőpontja: $F(0; 0; 3)$. A sík egyenlete: $x + 2y = 0$. *b)* $\mathbf{n}(-8; -6; -4)$ vagy $\mathbf{n}^*(4; 3; 2)$, a felezőpont $F(-2; 1; 3)$. A sík egyenlete: $4x + 3y + 2z = 1$.

3608. $\overrightarrow{AB}(7; -1; -5)$, $\overrightarrow{AC}(-4; -6; -5)$. $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{n}(-25; 55; -46)$, mert $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$. Itt $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_3 = -5$, $b_1 = -4$, $b_2 = -6$, $b_3 = -5$. A sík egyenlete: $-25x + 55y - 46z = 31$.

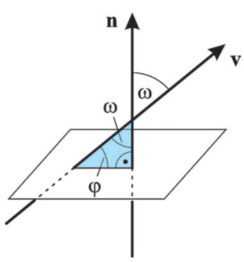
A $D(1; 1; z)$ pontra $-25 + 55 - 46z = 31$, innen $z = -\frac{1}{46}$.

3609. Az egyenesnek a síkkal bezárt szögét azzal a φ szöggel mérjük, amelyet az egyenes a síkra eső merőleges vetületével bezár. (3609. ábra). Az ábra szerint látjuk, hogy ez a φ szög az egyenes irányvektorának ($\mathbf{v}$-nek) és a sík normálvektorának ($\mathbf{n}$-nek) a segítségével kiszámítható! $\varphi = 90° - \omega$ (3609/I.) ábra), ahol ω a $\mathbf{v}$ és az $\mathbf{n}$ vektorok hajlásszöge. ω-t az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ skaláris szorzattal határozzuk meg. $\mathbf{n}(2; 5; 7)$, $\mathbf{v}(3; 4; 2)$, $|\mathbf{n}| = \sqrt{78}$; $\mathbf{v} = \sqrt{29}$;

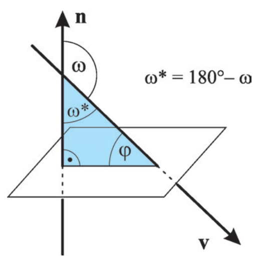
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 6 + 20 + 14 = 40$, másrészt $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{78} \cdot \sqrt{29} \cos\omega$. Innen $\cos\omega = \frac{40}{\sqrt{78} \cdot \sqrt{29}}$.

$\omega = 32{,}75°$, $\varphi = 57{,}28°$. Ha $\cos\omega < 0$, akkor az (3609/II.) ábra szerint ω^*-gal számolunk.

3609/I.



3609/II.



Két egyenes metszéspontja. Pont távolsága egyenestől, síktól

3610. *a)* $(-3; 5)$; *b)* $(4; 8)$; *c)* $\left(\frac{11}{2}; 1\right)$; *d)* $\left(\frac{14}{5}; -\frac{3}{5}\right)$; *e)* $P(2; 5)$; *f)* $(-3; 2)$;
g) $\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$; *h)* $(2; 4)$; *i)* $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$, ha $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Ha $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, akkor nincs megoldás. Ha $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, akkor végtelen sok közös pont van.

3611. *a)* $B(-2; 1)$, $A(5; -2)$, $C(3; 5)$,
b) $\left(\frac{12}{11}; -\frac{8}{11}\right)$; $\left(\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$; $\left(\frac{16}{9}; -\frac{5}{9}\right)$; *c)* $\left(-\frac{32}{3}; -\frac{55}{13}\right)$; $\left(-\frac{25}{13}; -\frac{11}{13}\right)$; $\left(\frac{60}{37}; -\frac{110}{37}\right)$.

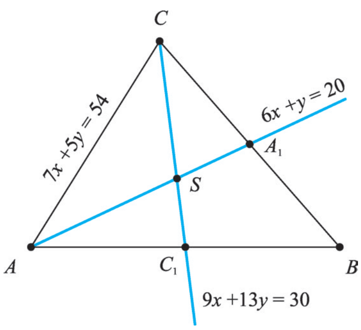
3612. $AC \cap CC_1 \Rightarrow C(12; -6)$, $AC \cap AA_1 \Rightarrow A(2; 8)$, $AA_1 \cap CC_1 \Rightarrow S\left(\frac{10}{3}; 0\right)$.
$\frac{2 + b_1 + 12}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow b_1 = -4$, $\frac{8 + b_2 - 6}{3} = 0 \Rightarrow b_2 = -2$, $B(-4; -2)$.

3613. $AB \cap AC = A$, $A(1; 2)$, $AC \cap CC_1 = C$, $C(2; 3)$, $CC_1 \cap AB = C_1$, $C_1(3; 5)$, $\frac{b_1 + 1}{2} = 3$, $\frac{b_2 + 2}{2} = 5$, $B(5; 8)$, BC: $5x - 3y = 1$.

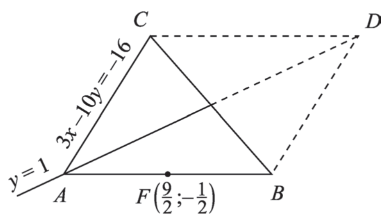
3614. $BB_1 \cap CC_1 = S \Rightarrow S\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. AA_1 harmadolópontja: S. $A_1(3; 2)$. Tükrözzük S-t A_1-re: $S^*\left(\frac{16}{3}; 2\right)$, $S^*C \parallel BB_1$ miatt S^*C: $3x + 5y = 26$, $CC_1 \cap S^*C = C \Rightarrow C(2; 4)$. C-t A_1-re tükrözve: $B(4; 0)$.

3615. $A(-2; 1)$ A-t F-re tükrözve $B(7; -2)$,
$AC \parallel BD \Rightarrow \mathbf{n}(3; -10)$, $3x - 10y = 41$. $\left.\begin{array}{r} 3x - 10y = 41 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow D(17; 1)$. AD felezőpontja $A_1\left(\frac{15}{2}; 1\right)$, B-t A_1-re tükrözve: $C(8; 4)$.

3612.



3615.



3616. $e_1 \cap e_2 = B(-6;\,-6)$. S a BB_1 szakasz B_1-hez közelebb eső harmadolópontja: $B_1(6;9)$, B-t B_1-re tükrözve: $D(18;\ 24)$. $ABCD$ paralelogramma, $AB \parallel CD$, $m = \frac{1}{3} \Rightarrow CD$: $x - 3y = -54$. $BC \cap CD = C$; $\left.\begin{array}{l} y = 4x + 18 \\ x - 3y = -54 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0;\ 18)$. BC felezőpontja $A_1(-3;\ 6)$, AA_1 harmadolópontja S. $\frac{2(-3)+x}{3} = 2$; $\frac{2\cdot 6 + y}{3} = 4 \Rightarrow A(12;\ 0)$.

3617. A és B pontok koordinátái kielégítik az adott egyenes egyenletét: $A(2;\ 4)$, $B\left(\frac{15}{2};\ \frac{11}{5}\right)$.
$\frac{2 + \frac{15}{2} + c_1}{3} = 5$, $\frac{4 + \frac{11}{5} + c_2}{3} = 6 \Rightarrow C\left(\frac{11}{2};\ \frac{59}{5}\right)$. $AB = 5{,}8$; $BC = 9{,}8$;
$AC = 8{,}5$. $\overrightarrow{AC}(3{,}5;\ 7{,}8)$, $\overrightarrow{AB}(5{,}5;\ -1{,}2)$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 3{,}5\cdot 5{,}5 - 7{,}8\cdot 1{,}8 = 5{,}21$,
$5{,}21 = 9{,}8\cdot 7{,}8\cdot\cos\alpha \Rightarrow \alpha = 84°$. $\beta = 60°$, $\gamma = 36°$.

3618. B-t tükrözve a szögfelező egyenesére, B_1 az AC egyenesére illeszkedik. BB_1: $\mathbf{n}(1;\ -2)$, $x - 2y = 1$. $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow F\left(\frac{3}{5};\ -\frac{1}{5}\right)$. BB_1 felezőpontja $F \Rightarrow B_1\left(\frac{11}{5};\ \frac{3}{5}\right)$. $\overrightarrow{AB_1}(6;\ -7)$,
$\mathbf{n}(7;\ 6)$, AB_1: $7x + 6y = 19$. $\left.\begin{array}{l} 7x + 6y = 19 \\ 2x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(-\frac{13}{5};\ -\frac{31}{5}\right)$.

3619. $\left.\begin{array}{l} x + y = 11 \\ 2x - 3y = -18 \end{array}\right\} \Rightarrow$, $C(3;\ 8)$; $\left.\begin{array}{l} x + z = 11 \\ x - 4y = -19 \end{array}\right\} \Rightarrow B(5;\ 6)$; $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = -18 \\ x - 4y = -19 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow A(-3;\ 4)$. Az ABC háromszög súlypontja és az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög súlypontja azonos. $S\left(\frac{5}{3};\ 6\right)$.

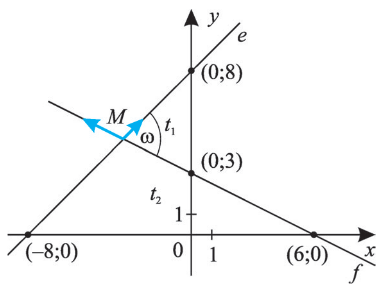
3620. *I. megoldás:* Az egyenesek normálegyenlete: $\frac{-2x + y + 2}{\sqrt{5}} = 0$, illetve $\frac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} = 0$;
$\frac{-2x + y + 2}{\sqrt{5}} = \frac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = x$. *II. megoldás.* Az adott egyenesek és az x tengely meghatározzák az $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ 0)$, $C(1;\ 0)$ háromszöget. Az A-tól induló szögfelező $AB : AC$ arányban osztja a BC szakaszt. $AB : BC = 2\sqrt{5} : \sqrt{5} = 2 : 1$,
$BP : PA = 2 : 1$, $\Rightarrow P(0;\ 0)$, PA: $y = x$.

3621. $P(2;\ 0)$, $Q(0;\ -2)$.

3622. $M(4;\ 3)$, $|AM| = 5$ egység.

3623. $e \cap f$: $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ x - y = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(-\frac{10}{3};\ \frac{14}{3}\right)$,
$t_1 = \frac{5\cdot\frac{10}{3}}{2} = \frac{25}{3}$, $t_2 = \frac{14\cdot\frac{14}{3}}{2} = \frac{98}{3}$, $t = \frac{25}{3} + \frac{98}{3} = 41$ területegység. $\mathbf{v}_e(-2;\ 1)$, $\mathbf{v}_f(1;\ 1)$. $\omega = 71{,}6°$.

3623.



V

3624. $e_1 \cap e_2, A(-6; -6)$. Legyen $P(3; -3)$ az e_1 egy pontja. Határozzuk meg Q-t úgy, hogy H a PQ P-hez közelebbi harmadolópontja legyen. $\frac{q_1+6}{3} = 8$, $\frac{q_2-6}{3} = 6 \Rightarrow Q(18; 24)$. Q ponton át írjuk fel az e_1-gyel párhuzamos g egyenes egyenletét: $x - 3y = -54$. $e_2 \cap g = B$, $\left.\begin{array}{l} y = 4x + 18 \\ x - 3y = -54 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0; 18)$, BC szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja H. $\frac{2c_1+0}{3} = 8$, $\frac{2c_2+18}{3} = 6 \Rightarrow C(12; 0)$.

3625. e_1: $y = \frac{8}{15}x - \frac{7}{3}$; e_2: $y = \frac{1}{2}x - 1$; $12{,}4 > \frac{8}{15} \cdot 15{,}2 - \frac{7}{3}$ és $12{,}4 > \frac{1}{2} \cdot 15{,}2 - 1$. P az e_1 és az e_2 fölött van, tehát nincs a háromszögben.

3626. $e_1: y = 2x + 2$; $e_2: y = -x + 2$; e_3: $y = -\frac{3}{5}x + \frac{36}{5}$;

$c^2 > 2c + 2$ és $\quad c^2 > -c + 2$ és $\quad c^2 < -\frac{3}{5}c + \frac{36}{5}$.

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$c > 1 + \sqrt{3} \cup c < 1 - \sqrt{3}$, $\quad c > 1 \cup c < -2$, $\quad -3 < c < 2{,}4$. Így $-3 < c < -2$.

3627. AB egyenlete $y = 0$. CD egyenlete $x\sqrt{2} + y\left(2 - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$, $AB \cap CD$: $K(1; 0)$; $AK = 1$.

3628. $AC \cap AE = A$, $A(0; 5)$. A-t tükrözve K-ra: $D(4; 1)$. $AC \cap CE = C$, $C(1; 0)$, C-t tükrözve K-ra $F(3; 6)$. $CE \cap AE = E$, $E(6; 4)$, E-t tükrözve K-ra $B(-2; 2)$.

3629. A háromszög csúcsai: $A(2; 0)$, $B(8; 0)$, $C(5; 3)$. $t_{ABC} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ területegység. Mindkét keletkező kúp sugara 3, magassága 3. Alkotója: $a = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, $2P = 2r\pi a = 18\sqrt{2}\pi$ területegység. $V = 2 \cdot \frac{3^2\pi \cdot 3}{3} = 18\pi$ térfogategység.

3630. *a)* $e_1 \cap e_2 = M$, $\Rightarrow 5x = -17 \Rightarrow x = -\frac{17}{5}$, behelyettesítve: $-\frac{17}{5} + 2y + 4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = -\frac{3}{10}$, $M\left(-\frac{17}{5}; -\frac{3}{10}\right)$. e_3-ba behelyettesítve $5 \cdot \left(-\frac{17}{5}\right) - 7\left(-\frac{3}{10}\right) + 6 \neq 0$, ezért a három egyenesnek nincs közös pontja. *b)* $e_1 \cap e_3 = M$, $M\left(-3; \frac{1}{2}\right)$ koordinátáit e_2 egyenletébe helyettesítve: $-15 + 2 + 13 = 0$, a három egyenes közös pontja M. *c)* Mindhárom egyenes áthalad az $M(1; 2)$ ponton. *d)* Nincs közös pont.

3631. $e_1: y = x$; $e_2: \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$; $e_3: x - 3y = -4$, $e_1 \cap e_2 = M$, $M(2; 2)$. M koordinátáit e_3 egyenletébe helyettesítve: $2 - 6 = -4$, így mindhárom egyenes áthalad az M ponton.

3632. $s_a: x - 4y = -19$; $s_b: x = 1$; $C_1(-1; 6)$ $\overrightarrow{CC_1}(-6; 3)$ $\mathbf{n}(1; 2)$; $s_c: x + 2y = 11$; Mindhárom egyenes átmegy a háromszög $S(1; 5)$ súlypontján.

3633. $A(8; 4)$; $B(4; 1)$; $D(2; 7)$; $O(0; 0)$; $\overrightarrow{OA}(8; 4)$, $\overrightarrow{DB}(-2; 6)$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{DB}\right| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. $\cos\varphi = \frac{8}{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{50}$,

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{1}{50}} = \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}, \quad t = \frac{OA\cdot DB\cdot \sin\varphi}{2} = \frac{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}}{2} = 28 \text{ te.}$$

3634. $Q(x;y)$, $Q_1(-1;4)$, $Q_2(3;2)$.

3635. *a)* $\left.\begin{matrix}3x-y=-2\\ x+2y=3\end{matrix}\right\}$, $M\left(-\frac{1}{7};\frac{11}{7}\right)$. $3x-8y=-13$. *b)* $8x-7y=-9$.

3636. *a)* $\left.\begin{matrix}x-3y=6\\ 4x+y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 39x+13y=-6$. *b)* $5x-3y+20=0$.

c) $P\left(-\frac{10}{3};-3\right)$, $Q(2;0)$, $\overrightarrow{PQ}(16;9)$, $9x-16y=18$.

3637. $\left.\begin{matrix}2x-y=-1\\ x-y=-5\end{matrix}\right\} - \Rightarrow x=4,\ y=9,\ M(4;9),\ 4m-9+4=0 \Rightarrow m=\frac{5}{4}$.

3638. $y=2x-\frac{1}{2} \Rightarrow m=2,\ m_1=\operatorname{tg}(\alpha-45°),\ m_2=\operatorname{tg}(\alpha+45°),\ m_1=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}45°}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}45°}=\frac{1}{3};$

$m_2=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}45°}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}45°}=\frac{3}{-1}=-3,\ \mathbf{v}_1(3;1),\ \mathbf{n}_1=(1;-3),\ x-3y=-10;\ \ \mathbf{v}_2(1;-3),$

$\mathbf{n}_2=(3;1),\ 3x+y=0.$

3639. $\left.\begin{matrix}x+y=b\\ -x+2y=6\end{matrix}\right\} + \Rightarrow 3y=b+6 \Rightarrow y=\frac{b+6}{3},\ x=\frac{2b-6}{3},\ P\left(\frac{2b-6}{3};\frac{b+6}{3}\right).$

$\left.\begin{matrix}x+y=b\\ 5x-y=2\end{matrix}\right\} + \Rightarrow 6x=b+2 \Rightarrow x=\frac{b+2}{6},\ y=\frac{5b-2}{6}.$

$PQ=1 \Rightarrow PQ^2=1,\ \left(\frac{2b-6}{3}-\frac{b+2}{6}\right)^2+\left(\frac{b+6}{3}+\frac{5b-2}{6}\right)^2=1,$

$\left(\frac{3b-14}{6}\right)^2+\left(\frac{14-3b}{6}\right)^2=1,\ 2\left(\frac{3b-14}{6}\right)^2=1,\ \frac{3b-14}{6}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{14}{3}\pm\sqrt{2}.$

3640. $\left.\begin{matrix}5x-4y=0\\ \underline{y=-\frac{3}{4}x+b}\end{matrix}\right\} \Rightarrow P\left(\frac{b}{2};\frac{5b}{8}\right);\quad \left.\begin{matrix}x-4y=0\\ \underline{y=-\frac{3}{4}x+b}\end{matrix}\right\} \Rightarrow Q\left(b;\frac{b}{4}\right).\ PQ=5 \Rightarrow PQ^2=25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(b-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{4}-\frac{5b}{8}\right)^2=25 \Rightarrow b=\pm 8.$

3641. $e: 3x-5y=6$, $f: 4x+y+6=0$. Az e egyenest tükrözzük az origóra. $P(2;0)$ az e egy pontja, ennek az origóra vonatkozó tükörképe $P_1(-2;0)$, $\mathbf{n}(3;-5)$, $3x-5y=-6$.

$e_1\cap f: \left.\begin{matrix}4x+4y=-6\\ \underline{3x-5y=-6}\end{matrix}\right\} \Rightarrow M\left(-\frac{36}{23};\frac{6}{23}\right);\quad \overrightarrow{OM}\left(-\frac{36}{23};\frac{6}{23}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(1;6) \Rightarrow x+6y=0.$

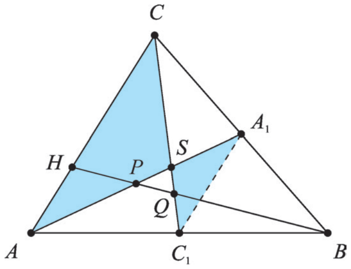
3642. Tükrözzük az e egyenest P-re. Az e egy pontja $Q(0;2)$, $Q_1(6;-6)$. $e_1: \mathbf{n}(1;3)$, $Q(6;-6) \Rightarrow x+3y=-12.\ e_1\cap f=M \Rightarrow M\left(-\frac{3}{7};\frac{27}{7}\right),\ \overrightarrow{MP}\left(\frac{24}{7};\frac{13}{7}\right) \Rightarrow \mathbf{n}(13;-24).$

$\mathbf{n}(13;-24)$. A keresett egyenes: $13x-24y=87$.

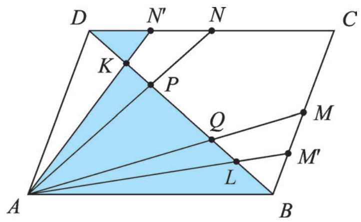
V

3643. Vegyünk fel az egyik egyenesen egy P_1 pontot, a másik egyenesen olyan pontokat, amelyekre a feltétel teljesül. A keresett egyenesek a P_1P_2, illetve a P_1P_3 egyenesekkel párhuzamos, az adott ponton átmenő egyenesek.
Legyen $P_1(0; 8)$, ekkor $P_2(1; 4)$, $P_3(-1; 7)$. $\overrightarrow{P_1P_2}(1; -4)$, $\mathbf{n}(4; 1)$, $4x + y = 23$, $\overrightarrow{P_1P_3}(-1; -1)$, $\mathbf{n}(1; -1)$, $x - y = 2$.
3644. Legyen $P_1(0; 4)$ az e_1 tetszőleges pontja. A feltételnek megfelelő e_2-n levő pontok: $P_2(-2; 7)$, $P_3(2; 3)$ A keresett P-n áthaladó egyenesek párhuzamosak P_1P_2-vel, illetve P_1P_3-mal. $\overrightarrow{P_1P_2}(2; -3) \Rightarrow$ $\mathbf{n}(3; 2)$, $3x + 2y = 26$, $\overrightarrow{P_1P_3}(2; -1) \Rightarrow$ $\mathbf{n}(1; 2)$, $x + 2y = 14$.
3645 P_1P_2, illetve P_2P_3-nak az y tengelyre eső vetülete 2, ahol P_2 az e_1 egyenesre, P_1, P_3 az e_2 egyenesre illeszkedik. $P_2(-1; 2)$, $P_1(8; 0)$, $P_3(5; 4)$. $\overrightarrow{P_1P_2}(-9; 2) \Rightarrow$ $\mathbf{n}_1(2; 9) \Rightarrow 2x + 9y = 102$, $\overrightarrow{P_2P_3}(6; 2) \Rightarrow$ $\mathbf{n}_2(1; -3) \Rightarrow x - 3y = -24$.
3646. Legyen $P_1(0; 4)$ az e_1 egyenes pontja, $P_2(0; 7)$, $P_3(-9; 1)$ az e_2 pontjai. $\overrightarrow{P_1P_2}(0; 3) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{n}(1; 0)$, $x = 3$, $\overrightarrow{P_1P_3}(9; 3) \Rightarrow$ $\mathbf{n}(1; -3)$, $x - 3y = -18$.
3647. Legyen $Q(2; 0)$ az egyik egyenes egy pontja. $QP : PQ_1 = 1 : 2 \Rightarrow Q_1(2; 3)$. Q_1-en áthaladó, az előbbi egyenessel párhuzamos kimetszi a másik egyenesből az M pontot. $\mathbf{n}(1; -1)$, $Q_1(2; 3) \Rightarrow x - y = -1$. $\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ \underline{x + 2y = 14} \end{array}\right\} - \Rightarrow M(4; 5)$, $\overrightarrow{PM}(2; 4) \Rightarrow$ $\mathbf{n}(2; -1) \Rightarrow 2x - y = 3$.
3648. Legyen Q az e egyenes egy pontja. Meghatározzuk azt a Q_1 pontot, amelyre $QP : PQ_1 = 3 : 2$. A Q_1-re illeszkedő $e_1 \parallel e$ egyenes egyenletét felírva meghatározzuk $e_1 \cap f = M$-et. A megoldás a PM egyenes. $Q(2; -3)$, $Q_1\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right)$, $e_1 : \mathbf{n}(1; 1) \Rightarrow x + y = 4$.
$e_1 \cap f$: $\left.\begin{array}{r} 8x + 3y = 7 \\ \underline{x + y = 4} \end{array}\right\} \Rightarrow M(-1; 5)$; $\overrightarrow{PM}(-2; 4) \Rightarrow$ $\mathbf{n}(2; 1)$, $2x + y = 3$.
3649. $AP : PS = 3 : 1$.
3650. $ABK\triangle \sim DKN'\triangle$, $DN' : AB = DK : KB = 1 : 4$, $DK = \frac{1}{5}BD$. $ABP\triangle \sim DNP\triangle$, $DN : AB = DP : PB = 1 : 2$, $DP = \frac{1}{5}BD$. Hasonló módon kapjuk: $BL = \frac{1}{5}BD$, $BQ = \frac{1}{3}BD$.
Így: $PQ = \frac{1}{3}BD$, $KP = \frac{2}{15}BD \Rightarrow$ $DK : KP : PQ : QL : LB = 3 : 2 : 5 : 2 : 3$.

3649.



3650.



3651. $C(c; 9-c)$ ahol $0 < c < 9$.

$R\left(\frac{2c}{3}; \frac{24-c}{3}\right)$, $Q\left(\frac{c+12}{3}; \frac{9-c}{3}\right)$, $K\left(\frac{c}{2}; \frac{9-c}{2}\right)$, $L(3; 3)$, $M\left(\frac{2c+6}{6}; \frac{24-2c}{6}\right)$,

$N\left(\frac{c+12}{6}; \frac{21-c}{6}\right)$. $KL = \sqrt{\left(\frac{c}{2}-3\right)^2 + \left(\frac{9-c}{2}-3\right)^2} = \frac{\sqrt{2c^2-18c+45}}{2}$,

$MN = \sqrt{\left(\frac{c-6}{6}\right)^2 + \left(\frac{3-c}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{2c^2-18c+45}}{6}$. $KL : MN = \frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3:1$.

3652. AC: $16x + 3y = 48$, a keresett egyenes: $y = m(x+6)$. Ha $x = 0$, $y = 6m \Rightarrow AE = 16 - 6m$.

$AC \cap e: 16x + 3m(x+6) = 48 \Rightarrow x = \frac{48-18m}{3m+16}$. $T_{ABC} = 24$, $T_{AED} = 12$.

$T_{AED} = 12 = \frac{1}{2}(16-6m)\cdot\frac{48-18m}{3m+16} = \frac{6(8-3m)^2}{3m+16} \Rightarrow (8-3m)^2 = 2(3m+16) \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = \frac{14}{3}$, $m_2 = \frac{2}{3}$. Mivel $AE > 0$, $m_1 = \frac{14}{3}$ nem megoldás. e: $2x - 3y + 12 = 0$.

3653. $AC = 40$. $B_1\left(4 - 4\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}\right)$, $B_2\left(4 + 4\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\right)$.

3654. Legyen a rögzített pont $P(a; a)$, Írjuk fel a P-n átmenő $\mathbf{n}(n_1; n_2)$, illetve $\mathbf{m}(m_1; m_2)$ normálvektorú egyenesek egyenletét. Innen:

$A_1\left(\frac{n_1+n_2}{n_1}a; 0\right)$, $B_1\left(0; \frac{n_1+n_2}{n_2}a\right)$, $A_2\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}a; 0\right)$, $B_2\left(0; \frac{m_1+m_2}{m_1}a\right)$.

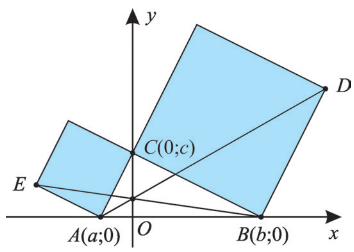
A_1B_2 egyenlete: $\frac{m_1+m_2}{m_2}x + \frac{n_1+n_2}{n_1}y = \frac{n_1+n_2}{n_1}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_2}a$,

A_2B_1 egyenlete: $\frac{n_1+n_2}{n_2}x + \frac{m_1+m_2}{m_1}y = \frac{n_1+n_2}{n_2}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1}a$. Az első egyenletet $n_1 \cdot m_2$-vel, a második egyenletet n_2m_1-gyel beszorozva összeadjuk: $x + y = 0$.

3655. $m(x-4) + (3y-1) = 0$ akkor teljesül minden m-re, ha $x - 4 = 0$ és $3y - 1 = 0$. Így $P\left(4; \frac{1}{3}\right)$.

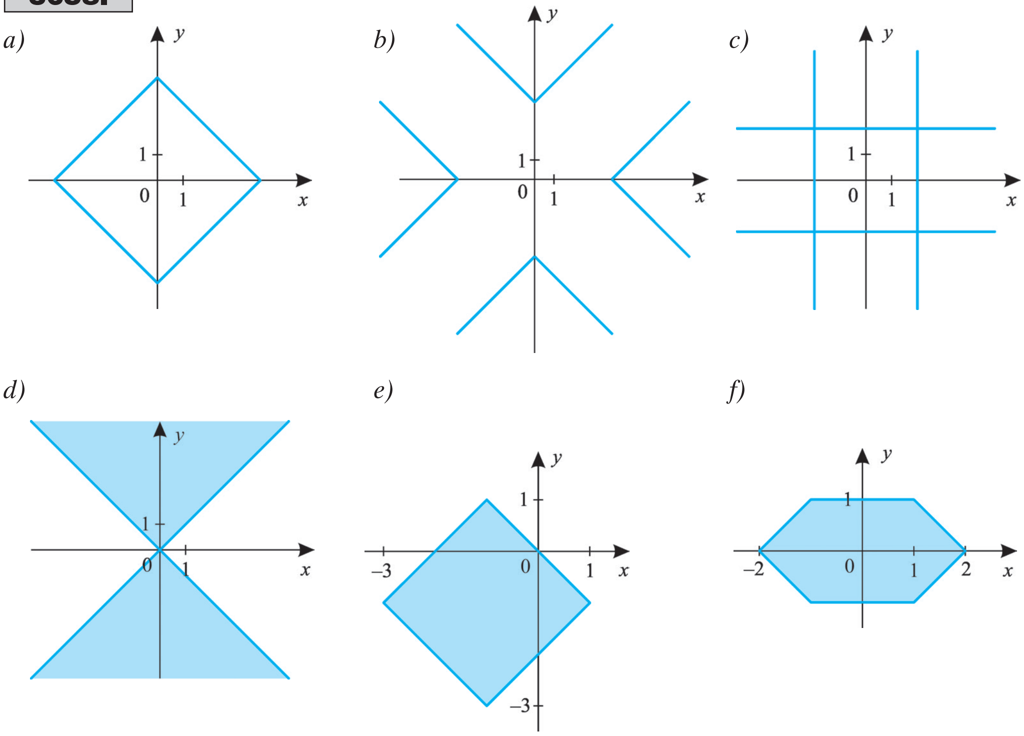
3656. Átalakítva az egyenletet: $(x-2y)m^2 + 3(2x-6y-1)m + (3x-2y+2) = 0$. Minden valós m-re akkor igaz, ha van olyan $(x;y)$ számpár, amely kielégíti a következő 3 egyenletet: $x - 2y = 0$, $2x - 6y - 1 = 0$, $3x - 2y + 2 = 0$. Ez a $P\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

3657.



3657. Az átfogóhoz tartozó magasság egyenlete: $x = 0$. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ 90°-os elforgatottja $\overrightarrow{BD}(c; b)$. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{OD}(b+c; b)$, $D(b+c; b)$. Hasonlóan: $\overrightarrow{OE}(a-c; -a)$, $E(a-c; -a)$, $\overrightarrow{AD}(b+c-a; b)$, $\mathbf{n}(b; a-b-c)$, AD: $bx + (a-b-c)y = ab$. $\overrightarrow{BE}(a-b-c; -a)$ $\mathbf{n}(a; a-b-c)$, BE: $ax + (a-b-c)y = ab$. A két egyenletet kivonva egymásból: $x = 0$ $(a \neq b)$.

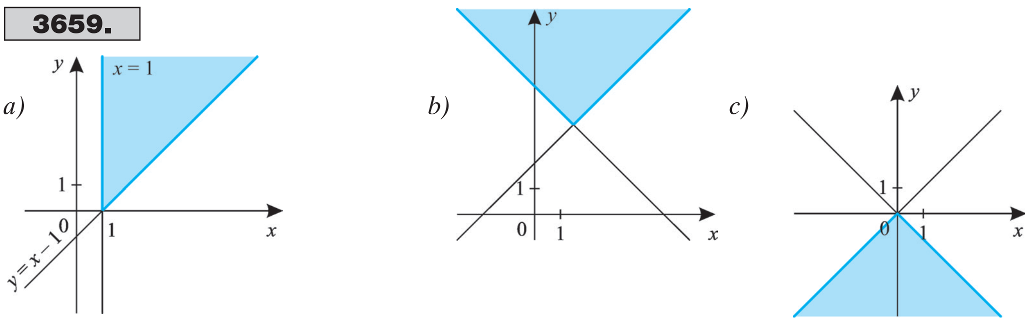
3658.



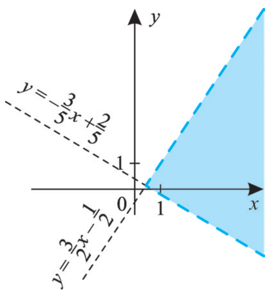
3658. *a)* Ha $P(x; y)$ kielégíti, akkor a $(-x; y)$, $(x; -y)$, $(-x; -y)$ is kielégíti, így az ábra mindkét tengelyre és az origóra is szimmetrikus $x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow x + y = 5$. *b)* $|x| - |y| = 4 \vee |x| - |y| = -4$. *c)* Szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. $|x| - 2 = 0 \cup |y| - 2 = 0$, $x = \pm 2 \cup y = \pm 2$. *d)* … *e)* Ha $|x| + |y| \leq 2$-re $\mathbf{v}(-1; -1)$ vektorú eltolást alkalmazunk, kapjuk a megoldást. *f)* Elegendő az első negyedet vizsgálni, mert pl. $(-x; y)$-ra $|-x-1|+|-x+1|+|2y| = |x+1|+|x-1|+|2y|$. Ha $x \geq 1$ és $y \geq 0$, $x - 1 + x + 1 + 2y \leq 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow x + y \leq 2$. Ha $0 \leq x \leq 1$ és $y \geq 0$, $1 - x + x + 1 + 2y \leq 4 \Rightarrow y \leq 1$.

3659. *a)* $x \geq 2 \cap y \geq x - 1$; *b)* $y \geq 5 - x \cap y \geq x + 2 \Rightarrow (x < 1{,}5 \cap -x + 5 \geq y \cap y \geq 3{,}5) \cup$ $\cup\ (1{,}5 < x \cap 3{,}5 \leq y \leq x + 2)$; *c)* $y \leq x \cap y \leq -x \Rightarrow x \leq 0, y \leq x$; $x > 0, y \leq -x$;

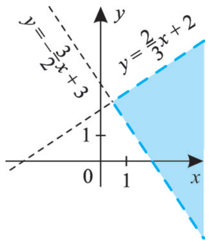
3659.



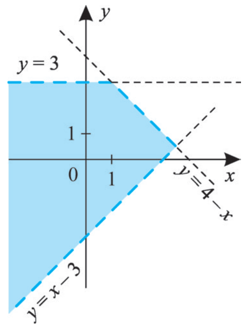
d)



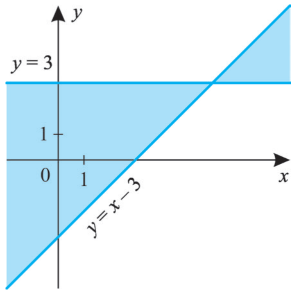
e)



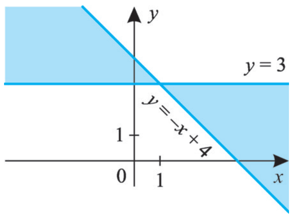
f)



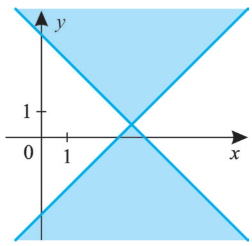
g)



h)



i)



d) $y > -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5} \cap y < \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$; $M\left(\frac{3}{7}; \frac{1}{7}\right)$; $x > \frac{3}{7}$ és $-\frac{3}{5}x + \frac{2}{5} < y < \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$;

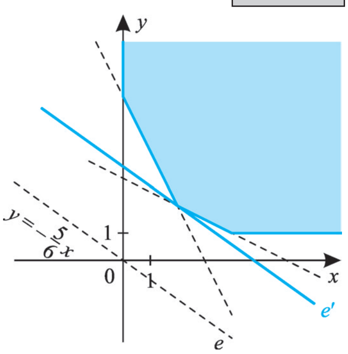
e) $y > -\frac{3}{2}x + 3 \cap y < \frac{2}{3}x + 2$; $M\left(\frac{6}{13}; \frac{30}{13}\right)$; $x > \frac{6}{13}$ és $-\frac{3}{2}x + 3 < y < \frac{2}{3}x + 2$;

f) $x \le 1 \cap x - 3 < y < 3 \cup 1 < x < \frac{7}{2} \cap x - 3 < y < -x + 4$. *g)* A szorzat értéke pozitív, ha mindkét tényező pozitív, vagy mindkét tényező negatív; $y \ge 3 \cap y \le x - 3 \cup y \le 3 \cap y \ge x - 3$. Ebből: $x \le 6 \cap x - 3 \le y \le 3$ vagy $x > 6 \cap 3 < y \le x - 3$.

h) Szorzat értéke negatív, ha tényezői ellenkező előjelűek: $y \le 3 \cap y \ge -x + 4 \cup y \ge 3 \cap y \le -x + 4$. Ebből: $x \le 1 \cap 3 \le y \le -x + 4 \cup x > 1 \cap -x + 4 \le y \le 3$.

i) Szorzat értéke negatív, ha tényezői ellenkező előjelűek: $y \le x - 3 \cap y \le -x + 4$ vagy $y \ge x - 3 \cap y \ge -x + 4$. Ebből ha $x \le 3{,}5$, akkor $y \le x - 3 \cup y \ge -x + 4$, ha $x > 3{,}5$, akkor $y \le -x + 4 \cup y \ge x - 3$.

3660.

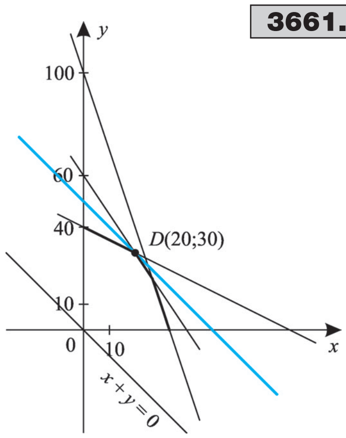


3660. $y \ge -2x + 6$, $y \ge -\frac{1}{2}x + 3$, $y \ge 1$, $x \ge 0$,

$k = 5x + 6y$, $5x + 6y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x$. k minimális, ha az e' egyenes áthalad a $P(2; 2)$ ponton. Ekkor $k = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 22$.

V

3661.

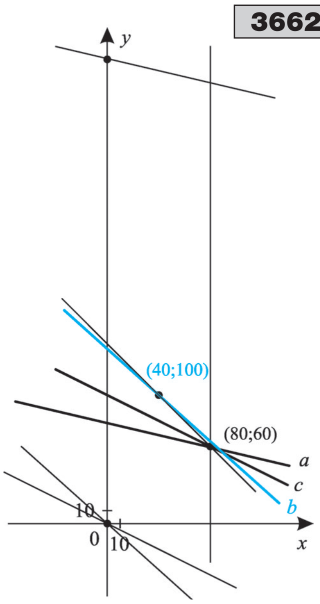


3661. Legyen x darab az A típusú szendvicsből, y db a B típusúból. Ekkor $3x+2y\le 120$, $3x+y\le 100$, $2x+5y\le 200$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\le 20$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. Keressük az $x+y=d$ maximumát. Az egyenesek metszéspontjai:

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y=120\\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=20\end{array}\right\}\Rightarrow x=20,\ y=30;$$

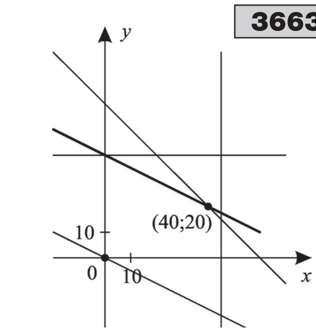
$$\left.\begin{array}{r}3x+2y=120\\ 3x+y=100\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{80}{3},\ y=20.$$ Az $x+y=0$ egyenessel párhuzamos egyenest legfeljebb a D pontig tolhatjuk. Így $d_{max}=20+30=50$.

3662.



3662. Ha az A típusú ruha elkészítéséhez x perc, a B típusúéhoz y perc kell, akkor $x\ge 0$, $y\ge 0$, $3x+3y\le 420$, $x+4y\le 440$, $x\le 80$. *a)* $600x+300y=a$ maximális, ha $x=80$, $y=60$, $a_{max}=66\,000$ Ft; *b)* $4500x+5000y=b$ maximális, ha $x=40$, $y=100$, $b_{max}=680\,000$ Ft; *c)* $600x+300y=a$ és $x+y=c$ maximális, ha $x=80$, $y=60$. Mindhárom követelményt egyszerre kielégítő program nem létezik.

3663.



3663. Legyen x db A típusú, y db B típusú munkadarab. Ekkor $0\le x\le 45$, $0\le y\le 40$, $2x+y\le 100$, $x+y\le 60$. A nyereség: $50x+100y=a$ maximális, ha $x=40$, $y=20$. A maximális nyereség: 4000.

3664. *a)* Állítsuk elő az adott egyeneseket paraméteres alakban. Az első egyenletből $x=4+5t_1$, $y=-3+4t_1$, $z=1+2t_1$. A második egyenes paraméteres egyenlete: $x=-3+3t_2$, $y=-3$, $z=-1$. A két egyenes pontosan akkor metszi egymást, ha létezik olyan t_1 és t_2, amelyre a

$$\left\{\begin{array}{l}4+5t_1=-3+3t_2\\ -3+4t_1=-3,\\ 1+2t_1=-1.\end{array}\right.$$ egyenletrendszernek van megoldása.

A harmadik egyenletből $t_1=-1$, a második egyenletből $t_1=0$, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. A két egyenes kitérő.

b) A paraméteres egyenletrendszerekből $8-5t_1=4+2t_2$, $4+2t_1=4-t_2$, $3t_1=-4-2t_2$. A felírt egyenletrendszernek van megoldása: $t_1=4$, $t_2=-8$. A két egyenes metszi egymást. Az M metszéspont koordinátái: $x=-12$, $y=8$, $z=12$. *c)* A két egyenes kitérő.

3665. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x=1+2t$, $y=-2+3t$, $z=2t$. Innen leolvashatjuk az egyenes irányvektorának koordinátáit: $\mathbf{v}(2;3;2)$. A sík normálvektorának koordinátái: $\mathbf{n}(1;-1;2)$. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=3\ne 0$, az egyenes nem párhuzamos a síkkal, tehát metszi a síkot. t-re felírhatjuk a következő egyenletet:
$(1+2t)-(-2+3t)+2(2t)=0$. Innen $t=-1$. Az egyenes a síkot az $M(-1;-5;-2)$ pontban metszi.

3666. Az egyenes a síkot az $M(5; 9; -17)$ koordinátájú pontban metszi.

3667. *a)* Az adott síkok normálvektorai $\mathbf{n}_1(3; -2; 1)$, $\mathbf{n}_2(1; -2; 3)$ nem párhuzamosak, azért a síkok sem párhuzamosak, tehát van metszésvonaluk. A metszésvonal $\mathbf{v}$ irányvektora merőleges mindkét sík normálvektorára, azért $\mathbf{v}$-nek választhatjuk a normálvektorok vektoriális szorzatát. $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = -4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, a $\mathbf{v}$ vektor koordinátái: $(-4; -8; -4)$ vagy $\mathbf{v}(-1; -2; -1)$. A metszésvonal egyik pontját úgy kapjuk meg, ha keresünk olyan pontot, amelynek koordinátái mindkét sík egyenletét kielégítik. Legyen például a $z = 0$. Akkor $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$ Innen $x = 2, y = 1$. *b)* A metszésvonal irányvektora: $\mathbf{v}(-1; -2; -1)$, egyik pontja: $P(2; 1; 0)$. A metszésvonal paraméteres egyenlete: $x = 2 - t, y = 1 - 2t, z = -t$, innen $2 - x = \dfrac{1-y}{2} = -z$.

3668. Oldjuk meg az adott síkok egyenleteiből álló egyenletrendszert.
$M\left(\dfrac{309}{188}; -\dfrac{269}{188}; -\dfrac{123}{188}\right)$.

V

Párhuzamos és merőleges egyenesek

3669. *a)* $\mathbf{n}_1(1; 2)$, $\mathbf{n}_2(1; 2) \Rightarrow$ párhuzamosak; *b)* párhuzamosak; *c)* $\mathbf{n}_1(1; 2)$, $\mathbf{n}_2(-2; 1)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow$ merőlegesek; *d)* $\mathbf{n}_1\left(\sqrt{2}; 1\right)$, $\mathbf{n}_2\left(\sqrt{2}; -2\right)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow$ merőlegesek; *e)* $m_1 = -\dfrac{3}{5}$; $m_2 = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow$ párhuzamosak; *f)* $m_1 = -\dfrac{2}{3}$ $m_2 = \dfrac{3}{2}$, $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow$ merőlegesek; *g)* $\mathbf{n}_1(4; -5)$, $\mathbf{n}_2(8; -10)$, $\mathbf{n}_2 = 2 \cdot \mathbf{n}_1 \Rightarrow$ párhuzamosak; *h)* $\mathbf{n}_1(5; -6)$, $\mathbf{n}_2(12; 10)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow$ merőlegesek.

3670. *a)* $p = 8$; $\alpha = 76°$. *b)* $p \pm 2\sqrt{6}$; $\alpha = \pm 67{,}8°$. *c)* $p = -\dfrac{2}{15}$; $\alpha = 21{,}8°$. *d)* $p = -\dfrac{10}{9}$; $\alpha = 31°$. *e)* $p_1 = 2$, $p_2 = -\dfrac{2}{3}$. $\alpha_1 = 36{,}9°$; $\alpha_2 = -14°$.

3671. $m_1 = -\dfrac{b}{a}$, $m_2 = \dfrac{b_1}{a_1}$, $m_3 = -\dfrac{b + b_1}{a + a_1}$, $m_1 = m_2 = m_3 \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{b_1}{a_1}$.

3672. $m_1 = -\dfrac{a+2}{a+3b+5}$, $m_2 = \dfrac{a+2}{2a+b-2}$. A két egyenes párhuzamos, ha $m_1 = m_2$ és $-\dfrac{3}{a+3b+5} \neq -\dfrac{2}{2a+b-2}$ és $a + 3b + 5 \neq 0$, $2a + b - 2 \neq 0 \Rightarrow -\dfrac{a+2}{a+3b+5} \neq$ $\neq \dfrac{a+2}{2a+b-2} \Rightarrow a = -2$, $b \in \mathbf{R} \setminus \left\{-1; 6; \dfrac{4}{3}\right\}$ vagy $b = -\dfrac{3}{4}(a+1)$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{11}{5}\right\}$, továbbá, ha $\left.\begin{aligned} a + 3b + 5 = 0 \\ 2a + b - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \dfrac{11}{5}$, $b = -\dfrac{12}{5}$. Egybeesik a két egyenes, ha $a = -2$, $b = \dfrac{4}{3}$.

3673. *a)* $p = -1$; *b)* $\dfrac{2}{3} \cdot (-p) = -1 \Rightarrow p = \dfrac{3}{2}$; *c)* $p = -1$, *d)* $\mathbf{n}_1(3p + 2; 1 - 4p)$, $\mathbf{n}_2(5p - 2; p + 4)$, $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = (3p + 2)(5p - 2) + (1 - 4p)(p + 4) = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 1$; *e)* $p \dfrac{1}{3}$.